Stability of line standing waves near the bifurcation point for nonlinear Schrodinger equations(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Yamazaki, Yohei

ISSUE DATE:

2015-03-23

URL:

https://doi.org/10.14989/doctor.k18768

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	山崎　陽平
論文題目	Stability of line standing waves near the bifurcation point for nonlinear Schrödinger equations		

（論文内容の要旨）

学位論文では, 以下の y 方向に周期境界条件を持つ非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad u(t,x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{T}_L \to \mathbb{C} \tag{1}$$

の線状定在波の軌道安定性が考察されている．但し，$\mathbb{T}_L = \mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}$ とする．ここで，方程式 (1) の解 $u(t,x,y)$ が定在波とは，周波数 $\omega > 0$ に対し，$u(t,x,y) = e^{i\omega t}\varphi(x,y)$ と表せる (1) の非自明解であることである．関数 $e^{i\omega t}\varphi$ が (1) の定在波であることと φ が定常方程式

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad \varphi(x,y) : \mathbb{R}\times\mathbb{T}_L \to \mathbb{C} \tag{2}$$

の非自明解であることは同値である．定在波の近傍から出発した方程式 (1) の解が時間がたっても定在波の軌道の近傍にとどまり続けるとき，その定在波は軌道安定であるといい，そうでないとき軌道不安定という．

周波数 $\omega > 0$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = -\partial_x^2 u - |u|^{p-1}, \quad u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{3}$$

は基底状態解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ と呼ばれる定在波を持つことが知られている．ここで, $p > 1$ であり，φ_ω は定常方程式

$$-\partial_x^2\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \quad \varphi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{4}$$

の正値対称解である．基底状態解の安定性については，Cazenave-Lions (1982) により，$1 < p < 5$ のとき基底状態解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は軌道安定であることが示され，Berestycki-Cazenave (1981) により $p > 5$ のとき基底状態解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は軌道不安定であることが示された．さらに, Weinstein (1982) により $p = 5$ のとき基底状態解 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は軌道不安定であることが示されている．

関数 $\varphi_\omega(x)$ を

$$\varphi_\omega(x,y) = \varphi_\omega(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}_L$$

とみなすことにより，方程式 (3) の定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は，方程式 (1) の線状定在波とみなせる. 非線形項の指数 $p \geq 5$ のとき関数 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は方程式 (3) の定在波として軌道不安定であるため，より多くの摂動を考慮する必要がある方程式 (1) の線状定在波としても軌道不安定である．一方 $1 < p < 5$ のとき，関数 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は方程式 (3) の定在波として安定であるが，方程式 (1) の線状定在波として安

定であるとは限らない．方程式 (3) の定在波として安定であった $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ が，方程式 (1) の線状定在波として不安定となることを， 線状定在波の横方向不安定性（Transverse instability）という．線状定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ の横不安定性に対しては，Rousset-Tzvetkov (2008, 2009) により $p = 3$ のときに，また $1 < p < 5$ のときは学位申請者 (2014) により，y 軸方向の臨界周期 $L_{\omega,p}$ が存在し，$0 < L < L_{\omega,p}$ のとき線状定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は軌道安定であり，$L > L_{\omega,p}$ のとき不安定となることが示された．しかし，臨界周期における，線状ソリトンの安定性は未解決問題であった．臨界周期のときは，線状定在波周りにおける線形化作用素の零固有値の多重度が増えるため， エネルギーから構成する Lyapunov 汎関数の 2 次の項が退化する．また， 線状定在波周りでの線形化作用素は実部が正の固有値を持たないので, 線形化方程式の不安定性から軌道不安定性を示す Grillakis, Shatah and Strauss (1987, 1990) 等の一般論も適用できない. これら二つの理由により臨界周期 $L_{\omega,p}$ において， 定在波の軌道安定性を示すことは困難であった．学位申請者は周波数 $\omega > 0$ を固定して臨界周期 $L_{\omega,p}$ のときには線状定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ から別の定在波が分岐することを示し, この分岐の情報を基に Lyapunov 汎関数の高次の情報を引き出すことに成功した．さらに, Lyapunov 汎関数の退化が起きるときに安定性を示す Maeda (2010, 2012) による議論を今回の問題に応用できるよう改良し，非線形項の指数 p の大きさに応じて安定な場合と不安定な場合が起こることを示した．Lyapunov 汎関数が 2 次以上の退化性を持つ場合の先行結果は少なく，本学位論文のように非線形性の指数により安定性と不安定性が変わる例はほとんど知られていなかった．この観点からも，学位論文の主結果は極めて興味深いと言える．

以上が本論文の主要結果である。

（ 続紙 3 ）

（論文審査の結果の要旨）

定在波の安定性不安定性を調べる際には，エネルギー汎関数から構成される Lyapunov 汎関数を Taylor 展開したときの，2 次の項の係数が重要な役割を果たす．2 次の係数が正または負の場合，適当な条件の下でそれぞれ安定と不安定に対応していることは，Grillakis, Shatah and Strauss (1987, 1990) などの一般論から知られている．しかし，2 次の係数が 0 となる場合は退化ケースとよばれ，一般論はまだなく問題ごとの特性を活用した研究手法しかない．学位申請者は，非線形シュレディンガー方程式の横不安定性の問題に対し，まず分岐理論を駆使することにより定在波の精密な性質を解析した．分岐解は特殊関数などで表現することは不可能なので，分岐理論を用いても一般には安定性・不安定性に必要な情報が得られるとは限らない．しかし申請者は分岐理論の深い考察を行うとともに，その解析をもとに Lyapunov 汎関数の Taylor 展開に対し高次の情報を引き出すことに成功した．学位論文の主結果は，その証明方法が数学的に高く評価できるだけでなく，結果自身も，非線形性の指数 p の大きさに応じて，定在波の安定性と不安定性が変化するというものであり極めて興味深い．退化ケースの先行論文において，ここまで精密に解析した例はほとんどないと言って良い．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成２７年１月２９日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　　年　　　月